

## Förord

Behovet av ett praktiskt inriktat läromedel i matematik med möjlighet att använda datorbaserad beräkningsteknik har varit ledstjärnan vid tillkomsten av denna bok. Boken kombinerar matematikens formelspråk med konkreta och praktiska beräkningar inom olika tekniska områden. Bokens grundidé är att knyta konkreta problemställningar till en matematisk lösning med syfte att utveckla studenters problemlösningsförmåga. Föregångare som Newton, Bernoulli, Euler, Maxwell och Hörmander har lagt grundstenar till den matematik som har lärts ut under århundraden och som vi som verkar i det 20:de århundradet kan skörda frukterna av. Boken är uppdelad i moduler vilka utgör baskunskaper för alla ingenjörsmässiga yrken. Varje modul bidrar till kunskapsinhämtning i olika steg. Bokens huvudinnehåll är numeriska beräkningar, ekvationer, algebra och formler, geometri, trigonometri, vektorer och analytisk matematik, i den sistnämnda ingår komplexa tal, funktioner, derivator, integraler och differentialekvationer. Den sista modulen beskriver kortfattat statistiska begreppen och modellering av data.

Tillämpad matematik är ett överskådande område inom vilket man kombinerar kunskaper från olika ämnen för att lösa problem inom det specifika ingenjörsområdet man jobbar med. Användning av datorer som effektiva beräkningsredskap har förstås blivit en del av tillämpad matematik. Boken ska uppmuntra studenter att använda moderna beräkningsprogram som Microsoft EXCEL och MATLAB och även introducerar studenter till programmeringsgrunder. MATLAB är ett datorbaserat och verktyg i framkant för tekniska och naturvetenskapliga beräkningar och simuleringar med stora tillämpningar inom alla ingenjörsområden.

Bokens första upplaga har använts de senaste fem åren vid olika kurser i tillämpad matematik vid Stockholms Tekniska Institut. Jag tackar redaktören Samuel Berg och alla studenter för värdefulla synpunkter och förslag till förbättringar. Den andra upplagan kommer med en ny layout och en förändrad struktur. Modul 1 till 5 är lämpliga för EQF nivå 5 samt modul 6 till 10 för EQF 6, 7 och högre. Vi har lagt in flera nya lösta exempel i varje avsnitt med anknytning inom elteknik, styr- och reglerteknik, mekanik, termodynamik och strömningslära. Boken lämpar sig för själv- och distansstudier och stöds av fullständiga lösningsförslag till alla övningar vilka kan nås via bokens hemsida ([www.larno.se](http://www.larno.se)). Ytterst tackar jag min fru Freya och min son Kevin som alltid stödjer mig i alla projekt. Jag välkomnar alla läsare att lämna kommentarer och synpunkter.

Stockholm i juni 2017. Luciano Triguero

# Innehållsförteckning

## Modul 1: Numeriska beräkningar

1.1	Vad menas med begreppet tal?	7
1.2	Beteckningar och terminologi	8
1.3	De fyra räknesätten	10
1.4	Räkning med negativa tal	12
1.5	Reella tal	14
1.6	Tal i potensform	18
1.7	Storheter, enheter och omvandling av enheter	21
1.8	Absolutbelopp	24
1.8.1	Olikheter som innehåller absolutbelopp	26
1.9	Tillämpning av absolutbelopp vid mätosäkerhet	28
1.10	Talsystem	29
1.11	En kort resa igenom MATLAB	34
1.11.1	Hur får du tillgång till programmet MATLAB?	35
1.11.2	MATLAB utvecklingsmiljö	35
1.12	Grundläggande programmering i MATLAB	39
1.13	Övningar till modul 1	41

## Modul 2: Algebra, ekvationer och formler

2.1	Vad menas med algebra?	50
2.2	Algebraiska operationer, regler och lagar	52
2.3	Ekvationer	59
2.4	Formler	69
2.5	MATLAB symbolisk matematik	74
2.6	Övningar till modul 2	82

## Modul 3: Koordinatsystem, trigonometri och vektorer

3.1	Inledning	91
3.2	Det kartesiska koordinatsystemet i 2D	91
3.2.1	Kvadranter	92
3.2.2	Avståndsformel i 2D	93
3.3	Det kartesiska koordinatsystemet i 3D	94
3.3.1	Vinkelmått	95
3.4	Trigonometri	98
3.4.1	Rätvinkliga trianglar	98

3.4.2	Samband mellan vinklar och sidor i rätvinkliga trianglar	102
3.4.3	Godtycklig triangel: Triangelsatserna	94
3.5	Polära och sfäriska koordinater	97
3.6	Vektorer och vektorräkning	99
3.6.1	Vektorers projektioner i planet	100
3.6.2	Vektorers addition i planet	101
3.6.3	Vektorers subtraktion i planet	102
3.6.4	Vektors projektioner i rummet	108
3.6.5	Produkt av vektorer	110
3.7	Övningar till modul 3	117

## Modul 4: Funktioner

4.1	Funktionens uttryckssätt	129
4.1.1	Funktionens terminologi	130
4.1.2	Funktionens monoton	134
4.2	Elementära funktioner	134
4.2.1	Polynomfunktioner	135
4.2.2	Rationella funktioner	146
4.2.3	Potensfunktioner	150
4.2.4	Exponentialfunktioner	153
4.2.5	Inversa funktioner	157
4.2.6	Logaritmer	159
4.2.7	Styckvisa funktioner	166
4.3	Ekvationssystem (2 ekvationer; 2 obekanta variabler)	168
4.4	Polynom interpolation	172
4.5	Övningar till modul 4	178

## Modul 5: Trigonometriska funktioner, boolesk algebra och booleska funktioner

5.1	Trigonometriska funktioner	193
5.1.1	Sinusfunktionen	193
5.1.2	Cosinusfunktionen	198
5.1.3	Tangentfunktionen	200
5.2	Trigonometriska formler	202
5.2.1	Några utvalda trigonometriska formler	203
5.2.2	Signalbehandling med sinus och cosinus funktioner	204
5.3	Trigonometriska ekvationer	207

5.3.1	Samtliga lösningar av trigonometriska grundekvationer.	208
5.3.2	Signaler med varierande amplitud	216
5.4	Boolesk algebra	218
5.5	Logiska samband	219
5.5.1	Invertering (NOT gate)	219
5.5.2	OCH-funktionen (AND gate)	220
5.5.3	ELLER-funktionen (OR gate)	220
5.5.4	ICKE-ELLER funktionen (NOR gate)	220
5.5.5	Boolesk algebra	223
5.6	Övningar till modul 5	228

## Modul 6: Komplexa tal

6.1	Inledning	239
6.2	Definition av komplexa tal	240
6.2.1	Komplexa tal i normalform	240
6.2.2	Det komplexa talplanet (Argands diagram)	240
6.2.3	Räknelagar med komplexa tal	241
6.2.4	Komplexa tal i polär form	247
6.2.5	Komplexa tal potensform	248
6.3	Komplexa tal beräkningar i MATLAB	252
6.4	Tillämpning av komplexa tal	253
6.4.1	Växelströms kretsteori	253
6.5	Övningar till modul 6	269

## Modul 7: Derivator

7.1	Inledning	278
7.2	Definition av derivata	278
7.3	Begreppen förändringshastighet och momentan förändringshastighet	281
7.4	Analytisk bestämning av derivatan	284
7.5	Deriveringsregler	285
7.6	Derivator av högre ordning	292
7.7	Derivator i MATLAB/Mupad	293
7.8	Monotoniegenskaper med hjälp av derivata	294
7.9	Tillämpning av derivata	298
7.9.1	Medelvärdessatsen	298
7.9.2	Optimeringsproblem	299
7.9.3	Differentialer och feluppskattning	304

7.9.4	Newton-Raphsons metod	308
7.10	Övningar	312

## Modul 8: Integraler

8.1	Inledning	323
8.2	Begreppet integral	323
8.2.1	Definition av integral	325
8.3	Hur beräknas bestämda integraler?	326
8.3.1	Begreppet primitiva funktioner	326
8.3.2	Allmänna regler för beräkning av obestämda integraler	329
8.3.3	Beräkning av bestämda integraler (Integralkalkylens huvudsats)	331
8.3.4	Andra integralsberäkningstekniker	334
8.3.5	Analytisk integration i MATLAB/MuPAD	344
8.4	Användning av integraler	347
8.4.1	Beräkning av areor	347
8.4.2	Beräkning av effektutveckling i växelströmsteknik	351
8.4.3	Beräkning av volymer	356
8.4.4	Beräkning av båglängd	358
8.4.5	Beräkning av arbete	362
8.5	Mer om integralberäkning	365
8.5.1	Generaliserade integraler	365
8.5.2	Numerisk integralberäkning	368
8.6	Övningar	375

## Modul 9: Differentialekvationer

9.1	Inledning	384
9.2	Exempel på modellbeskrivningar som leder till differentialekvationer	384
9.2.1	Sammanfattning	387
9.3	Terminologi hos differentialekvationer	387
9.4	Lösning av differentialekvationer	389
9.4.1	Lösning av differentialekvationer med separata variabler	389
9.4.2	Lösning av homogena differentialekvationer med konstanta koefficienter	392
9.5	Vissa inhomogena differentialekvationer	403

9.6	Analytisk (exakt) lösning av differentialekvationer i MATLAB	412
9.6.1	Kommandot dsolve()	412
9.7	Numerisk lösning av differentialekvationer	418
9.7.1	Eulers metod	419
9.7.2	Runge-Kuttas metod	422
9.7.3	Användning av funktionen ode45() i MATLAB	425
9.7.4	Numerisk lösning av ordinära differentialekvationer av andra ordningen	426
9.8	Övningar till modul 9	429

## Modul 10: Statistik och modellering av data

10.1	Inledning	439
10.2	Terminologi och definitioner	439
10.3	Deskriptiv statistik	440
10.3.1	Sammanställningsmetoder	440
10.3.2	Presentationsverktyg. Några utvalda diagram	449
10.4	Prediktiv statistik	453
10.4.1	Sannolikhetslära grunder	453
10.4.2	Sannolikhetsfunktioner och fördelningar	457
10.4.3	Regressionsanalys (kurvanpassning)	469
10.4.4	Minsta kvadratmetoden	478
10.5	Övningar till modul 10	490

Bilaga A: Facit	495
-----------------	-----

Bilaga B: Referenslitteratur	598
------------------------------	-----

Index	600
-------	-----